

Бакалавры, задача 1

Линейное преобразование φ имеет в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ матрицу $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, а $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ – матрица Грама этого базиса. Какой наибольший угол может быть между неколлинеарными собственными векторами преобразования φ ?

Ответ дайте в градусах (значок градуса в ответе указывать не нужно).

Бакалавры, задача 2

Несимметричную монету (вероятность выпадения орла равна 0,2, вероятность выпадения решки равна 0,8) подбрасывают до тех пор, пока не выпадет три орла подряд. Найдите вероятность P того, что понадобится ровно 7 бросков.

В ответе укажите число $P \cdot 10^7$.

Бакалавры, задача 3

Пусть a_n – количество чисел, десятичная запись которых начинается с единицы, среди чисел $2^1, 2^2, \dots, 2^n$. Вычислите предел $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$.

В ответе укажите значение 10^L .

Бакалавры, задача 4

Найдите минимальное значение выражения $|z - 2\sqrt{3}|^2 + |z + 2\sqrt{3}|^2 + 2|z^2 - 12|$ при условии, что $\operatorname{arctg}(-\frac{1}{2}) \in \operatorname{Arg}(z - 4\sqrt{3}i)$.

Бакалавры, задача 5

Два гомотетичных эллипса касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшего эллипса, пересекает больший в точках A и D , а меньший – в точках B и C . Найдите площадь большего эллипса, если площадь меньшего равна 4, а $AB : BC : CD = 1 : 2 : 2$.

Бакалавры, задача 6

Пусть $Q = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{49}) : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, 49\}$. Вычислите $\int_Q \dots \int_Q M^6(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, где $M(\mathbf{x}) = \max\{x_1, \dots, x_{49}\}$.

Ответ округлите до 4 знаков после запятой.

Бакалавры, задача 7

Дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y - yx^2 - y^3 + x(x^2 + y^2 - 6\sqrt{x^2 + y^2} + 8), \\ \dot{y} = x^3 + xy^2 - 4x + y(x^2 + y^2 - 6\sqrt{x^2 + y^2} + 8). \end{cases}$$

Найдите расстояние от точки $A(-\frac{5}{2}; 0)$ до ближайшего к ней предельного цикла этой системы.

Бакалавры, задача 8

При каком наибольшем значении M можно утверждать, что для некоторого значения параметра a существует интервал длины M (для переменной x), на которых векторы

$$\begin{pmatrix} \log_2(x - 3a^2 - 4a + 13) \\ e^x \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \log_3((a + 1)^2 - x) \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений некоторой системы линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x)?$$

Бакалавры, задача 9

Среди натуральных чисел $1, 2, 3, \dots, 158, 159$ случайным образом без возвращения выбирают 51 число. Пусть ζ – сумма всех выбранных чисел. Найдите дисперсию случайной величины ζ .

Бакалавры, задача 10

В клубе собрались 11 филателистов. Они стали обсуждать серию марок “Музеи мира”. Оказалось, что вместе любые 6 филателистов имеют все марки этой серии (то есть каждая марка серии есть хотя бы у одного из этих 6 филателистов), а любые 5 – нет (то есть найдётся марка серии, которой нет ни у одного из этих 5 филателистов). При каком минимальном количестве марок в серии эта ситуация возможна?