

Олимпиада “Я – профессионал” по математике для бакалавров. Вариант 1

ВРЕМЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ – 4 ЧАСА. ВСЕ ОТВЕТЫ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ОБОСНОВАНЫ.

Теоретические задачи

1. (2 балла) На комплексной плоскости рассматривается область G , заданная неравенством

$$|x - 2y - 6| + |x + 2y| < 6$$

(здесь $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$). Область D – образ области G при отображении $w(z) = z^2$. Изобразите область D и найдите её площадь.

2. (2 балла) Найдите $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg}(x^4) \cdot \int_{3x}^{5x} \operatorname{arctg}(t^3) dt \right)$.

3. (2 балла) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $u(x; y) = 16x^2 - 24xy + 24x + 9y^2 - 18y$ на множестве $\{(x; y) \mid x^2 - 6x + y^2 - 10y + 9 \leq 0\}$.

4. (2 балла) В некоторой республике 65 фермерских хозяйств, производящих сыр. Известно, что любые 30 из них производят не менее 21% сыра в республике. Какой наибольший процент сыра может производиться одним хозяйством?

5. (3 балла) Вычислите интеграл $\int_0^{\pi} \frac{|x - \frac{\pi}{2}|}{1 + 2^{\cos x}} dx$.

6. (2 балла) Пусть $u = (\sqrt{2}; \sqrt{4}; \dots; \sqrt{100})^T \in \mathbb{R}^{50}$ (векторы записываются столбцами) и линейное преобразование $\varphi: \mathbb{R}^{50} \rightarrow \mathbb{R}^{50}$ задано формулой $\varphi(v) = (uu^T)v$. Найдите характеристический многочлен $p(\lambda)$ преобразования φ . Является ли φ диагонализируемым?

7. (3 балла) Найдите все значения вещественного параметра a , для каждого из которых точка $O(0; 0)$ является устойчивым, но не асимптотически устойчивым положением равновесия системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = (a^2 - a)x - y - ax\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \dot{y} = x - ay\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Задачи от промышленных партнёров

8. (3 балла) Малыш и фрекен Бок заключили пари. Если Малыш с утра заправляет за собой кровать, то он получает от фрекен Бок 1 крону, а если нет, то он отдаёт одну крону фрекен Бок. Вероятность, что он заправит кровать, равна $\frac{4}{7}$ (каждый день эта вероятность одна и та же; при этом будет ли заправлена кровать в какой-либо день, не зависит от того, была ли она заправлена в другие дни). Если Малышу удастся накопить 3 кроны, то он вознаградит себя вкусным мороженым, а если однажды он не заправит кровать, и у него не будет денег, фрекен Бок пожалуется родителям. При наступлении одного из этих событий пари более не возобновляется. Какова вероятность того, что Малыш полакомится вкусным мороженым, если на момент заключения пари у него есть 1 крона?

9. (3 балла) Линейное преобразование φ в некотором ортонормированном базисе задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите площадь множества $\varphi(G)$, где $G = \{(x; y; z) \mid x^2 + 5y^2 \leq 5; z = 0\}$.

10. (3 балла) Имеется 400 карточек, на k из них написано число 1, на каждой из остальных – либо число 2, либо число 4. Известно, что среди этих карточек есть хотя бы одна карточка с числом 2, и хотя бы одна с числом 4. При каком наименьшем k из этих карточек гарантированно можно составить невырожденную матрицу размера 20×20 , независимо от того, сколько имеется карточек с числом 2 и сколько карточек с числом 4?