Магистры, задача 1

Определите наибольшее число N, при котором существует значение параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+|x-\alpha|^n}{1+2^n|x-\alpha|^n}$ расходится при N целочисленных значениях переменной x.

Магистры, задача 2

В параллелограмм $ABCD$ вписан эллипс, который касается сторон AB, BC, CD и AD в точках K, L, M и N соответственно. Найдите площадь четырехугольника $KLMN$, если известно, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна $s = 9$ и $AK : KB = 2$

Магистры, задача 3

Найдите сумму всех такие λ, при которых матрица $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -11 \\ 3 & 6 & 8\lambda - \lambda^2 \\ -11 & 7 & 50 + 10\lambda \end{pmatrix}$ является ковариационной матрицей некоторого случайного вектора. В ответе укажите сумму всех найденных λ. Если таких λ нет, укажите в ответе 2020.

Магистры, задача 4

В декартовой прямоугольной системе координат (базис ортонормированный) преобразование φ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Какой наибольший угол может быть между собственными векторами преобразования φ, отвечающими различным собственным значениям? Ответ дайте в градусах (значок градуса в ответе указывать не нужно).

Магистры, задача 5

Двенадцатигранную симметричную игральную кость (вероятности выпадения всех граней одинаковы) подбрасывают до тех пор, пока одна и та же цифра не выпадет трижды подряд. Определите вероятность P того, что потребуется ровно 7 бросков.

Магистры, задача 6

Найдите общую площадь множеств точек на комплексной плоскости

$$M_1 = \left\{ z : \ \left| z - 2\sqrt{3} \right| + \left| z + 2\sqrt{3} \right| \leqslant 8\sqrt{3} \right\}$$

и

$$M_2 = \left\{ z : \text{ один из аргументов числа } (z - 6i) \text{ принадлежит отрезку } \left[-\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right] \right\}.$$

Ответ округлите до двух знаков после запятой.

Магистры, задача 7

При каком наибольшем значении M можно утверждать, что для некоторого значения параметра a существует интервал длины M (для переменной x), на которых векторы

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3 - a^2 + 9a - x} - 1 \\ \sin x \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{x}{4} - a^2 + 4a + 7} \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений некоторой системы линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x)?$$

Магистры, задача 8

Пусть $Q = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{100}) : \ 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \ i = 1, \ldots, 100\}$. Вычислите $\int \cdots \int\limits_Q (m(\mathbf{x}) + 1)\, dx$, где $m(\mathbf{x}) = \min\{x_1, \ldots, x_{100}\}$.
Округлите ответ до четырёх знаков после запятой.

Магистры, задача 9

Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 9y - x^2 y - y^3 + x\left(3 + x^2 + y^2 - 4\sqrt{x^2 + y^2}\right), \\ \dot{y} = -9x + x^3 + xy^2 + y\left(3 + x^2 + y^2 - 4\sqrt{x^2 + y^2}\right). \end{cases}$$

Найдите наибольшую длину предельного цикла этой системы.
Ответ округлите до двух знаков после запятой.

Магистры, задача 10

На некотором острове живут 35 племён. Каждая пара племён либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что каждое племя враждует ровно с 12 другими племенами. Назовём тройку племён A, B, C *согласованной*, если либо все они дружат между собой, либо все они враждуют между собой. Каково наибольшее возможное количество согласованных троек племён может быть на этом острове?