

Олимпиада “Я – профессионал” по математике для магистров. Вариант 1

ВРЕМЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ – 4 ЧАСА. ВСЕ ОТВЕТЫ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ОБОСНОВАНЫ.

Теоретические задачи

1. (2 балла) На комплексной плоскости рассматривается область $G = \{(x; y) \mid |y| + |y - \frac{\pi}{2}| < \frac{2\pi}{3}; x < 0\}$ (здесь $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$). Область D есть образ области G при отображении $w(z) = e^z$. Изобразите область D и найдите её площадь.

2. (2 балла) Найдите $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg}(x^{10}) \cdot \int_0^{x^2} \operatorname{sh}(t^4) dt \right)$.

3. (2 балла) Определите наименьший возможный порядок линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, решениями которого являются всевозможные функции вида $y(x) + z(x)$ и $y(x) \cdot z(x)$, где функции $y(x)$ и $z(x)$ – решения уравнений $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$ и $z''' + 2z'' = 0$ соответственно.

4. (2 балла) В разложении функции $f(x) = \frac{1}{8+4x^2+2x^4+x^6}$ в ряд по степеням x найдите коэффициент при x^{202} .

5. (3 балла) Пусть \mathcal{P} – евклидово пространство многочленов степени не выше 100 со скалярным произведением $(p, q) = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt$. Линейное преобразование $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ таково, что $(\varphi(p), p) = 0$ для всякого многочлена $p \in \mathcal{P}$. Выясните, какие значения может принимать определитель матрицы φ в произвольном базисе.

6. (3 балла) В некоторой стране 42 компании, производящих вино. Известно, что любые 15 из них производят не более 36% вина в стране. Какой наименьший процент вина может производиться одной компанией?

7. (3 балла) Вычислите несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{x \ln \left(\frac{x+1}{2} \right)}{(x^4 + 1) \ln x} dx$ (в точках $x = 0$ и $x = 1$ подынтегральная функция определяется по непрерывности).

Задачи от индустриальных партнёров

8. (3 балла) У Малыша есть 400 крон. Карлсон уговорил его участвовать в следующей игре. Каждый раунд Малыш берёт стандартную колоду из 36 игральные карты и случайным образом вытягивает одну карту. Если это валет, дама или король, он выигрывает 200 крон, а если нет, то проигрывает 200 крон. Малыш продолжает играть до тех пор, пока не произойдёт одно из следующих событий: или у него окажется 800 крон (и он выигрывает), или он проиграет все деньги (у него останется 0 крон). Сколько в среднем минут продлится такая игра, если известно, что каждый раунд длится 2 минуты (и при этом количество раундов ничем не ограничено)?

9. (3 балла) Линейное преобразование φ в некотором ортонормированном базисе задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите $\sup_{x, y \in G} |\varphi(x) - \varphi(y)|$, где $G = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 5; x_3 = 0\}$.

10. (2 балла) Имеется 400 карточек, на k из них написано число 3, на каждой из остальных – число 2. При каком наименьшем k из этих карточек можно составить невырожденную матрицу размера 20×20 ?