ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в магистратуру

1. 2 Вычислить

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx.$$

2. 2 С помощью правила Лопиталя найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int\limits_0^x \sin\left(t^2\right)\,dt\right).$$

3. 2 Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)^n}{5^n\,n!}\,.$$

4. 2 Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = n^2\sin^2\left(\frac{x}{n}\right).$$

5. 3 Исследовать на экстремум функцию $u(x,y) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{8}$.

6. 3 Найти расстояние между поверхностью $\mathit{\Gamma}$ и плоскостью $\mathit{\Pi}$, где

$$\mathit{\Gamma} = \left\{\ (x,y,z)\ :\ z = \sqrt{2+x^2+y^2}\ \right\},\quad \mathit{\Pi} = \left\{\ (x,y,z)\ :\ x - y - 2z = 2\ \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

7. 2 Записать в другом порядке повторный интеграл

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)\,dx.$$

8. 2 Вычислить

$$\iint\limits_G \min\{\,x,\,y\,\}\,dxdy,\quad \text{где } G = \left\{\ (x,y)\ :\ x\in[0,1],\ y\in[0,1]\ \right\}.$$

9. 2 Вычислить

$$\iint\limits_S (x+y+z)\,dS,\quad \text{где } S = \left\{\ (x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ z\ge 0\ \right\}.$$

10. 3 Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int\limits_1^4 \left(x\sqrt{x}\,\big(y'(x)\big)^2 + \frac{3y^2(x)}{2\sqrt{x}}\right)dx,\quad y(1) = 2,\quad y(4) = 8.$$

11. 3 Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши

$$x^2u_x + y^2u_y + z(2y - z)u_z = 0, \quad u = \frac{2z}{z-y} \quad \text{при} \quad x = 2y, \quad z > x > y > 0.$$

12. 3 Вычислить преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{\exp(ix)}{(i+x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для справки: $F[g](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) \exp(-ixy)\, dx$, где $g \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$.

13. 3 Вычислить

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3}{z+3} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \quad \text{где контур ориентирован против часовой стрелки.}$$

14. 3 Решить задачу Коши

$$\sqrt{y}u_{xy} + 2yu_{yy} + u_y = 0, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

$$u\Big|_{y=4} = 2, \quad u_y\Big|_{y=4} = -\frac{1}{4}, \quad 0 < x < 1.$$

в наибольшей области, где решение определено однозначно, и указать эту область.

15. 3 Решить смешанную задачу на полупрямой

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u\Big|_{t=0} = \sin 3x, \quad u_t\Big|_{t=0} = -3\cos 3x, \quad x > 0,$$

$$u\Big|_{x=0} = -3t, \quad t > 0.$$

16. 3 Решить краевую задачу в $\mathbb{R}^2$ ($x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$):

$$\Delta u = 36r^2\cos 2\varphi, \quad r < 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$u_r\Big|_{r=1} = 8\cos 2\varphi + 4\cos 4\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

17. 3 Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$\rho_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Дискретная случайная величина Y имеет закон распределения $P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X - 2Y$, и вычислить математическое ожидание и дисперсию Z.

ОТВЕТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. 2 Вычислить

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx.$$

Ответ: $\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\ln 2 = \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3.$

2. 2 С помощью правила Лопиталя найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\int\limits_0^x \sin\left(t^2\right)\,dt\right).$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

3. 2 Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)^n}{5^n\,n!}\,.$$

Ответ: сходится по признаку Даламбера, так как $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{e}{5} < 1$.

4. 2 Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = n^2\sin^2\left(\frac{x}{n}\right).$$

Ответ: сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2.

5. 3 Исследовать на экстремум функцию $u(x,y) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{8}$.

Ответ: $u(-4,-4) = \frac{1}{2}$ — min, $\quad u(4,4) = \frac{3}{2}$ — max.

6. 3 Найти расстояние между поверхностью Γ и плоскостью Π, где

$$\Gamma = \left\{\ (x,y,z)\ :\ z = \sqrt{2+x^2+y^2}\ \right\},\quad \Pi = \left\{\ (x,y,z)\ :\ x-y-2z=2\ \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: $\rho\left(\Gamma,\Pi\right) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Пусть (x,y,z) — точка Γ, ближайшая к Π. Тогда вектор $(2x,2y,-2z)$ — нормаль к касательной плоскости поверхности Γ в этой точке — параллельна нормали $(1,-1-2)$ к Π. Следовательно, существует $a \in \mathbb{R}$, такое, что $(2x,2y,-2z) = a(1,-1-2)$, откуда $x = -y = \frac{z}{2}$, и $\frac{z^2}{4} + \frac{z^2}{4} - z^2 = -\frac{z^2}{2} = -2$, т. е. $z = 2$, $x = -y = 1$. Тогда точкой плоскости Π, ближайшей к Γ, является $(1,-1,2)+t(1,-1,-2)$ для подходящего $t \in \mathbb{R}$, а искомое расстояние равно $\left|t(1,-1,-2)\right| = |t|\sqrt{6}$. Имеем: $2 = 1+t+1+t-4+4t = 6t-2$, то есть $t = \frac{2}{3}$.

7. 2 Записать в другом порядке повторный интеграл

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)\,dx.$$

Ответ: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\sin x}^{1} f(x,y)\,dy.$

8. 2 Вычислить

$$\iint\limits_G \min\{\,x,\;y\,\}\,dxdy, \quad \text{где } G = \Big\{\;(x,y)\;\;:\;\;x\in[0,1],\;y\in[0,1]\;\Big\}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

9. 2 Вычислить

$$\iint\limits_S (x+y+z)\,dS, \quad \text{где } S = \Big\{\;(x,y,z)\;\;:\;\;x^2+y^2+z^2=1,\;z\geq 0\;\Big\}.$$

Ответ: π.

10. 3 Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int\limits_1^4 \left(x\sqrt{x}\,\big(y'(x)\big)^2 + \frac{3y^2(x)}{2\sqrt{x}} \right) dx, \quad y(1)=2, \quad y(4)=8.$$

Ответ: Уравнение Эйлера $2x^2y''+3xy'-3y=0$, экстремали $y(x)=C_1x^{-\frac{3}{2}}+C_2x$, допустимая экстремаль $\hat{y}(x)=2x$,

$$J\left(\hat{y}+h\right)-J\left(\hat{y}\right) = \int\limits_1^4 \left(x\sqrt{x}\,\big(h'(x)\big)^2 + \frac{3h^2(x)}{2\sqrt{x}} \right) dx > 0, \quad \forall\, h\in C_0^1[1,4], \quad h\not\equiv 0.$$

11. 3 Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши

$$x^2u_x + y^2u_y + z(2y-z)u_z = 0, \quad u = \frac{2z}{z-y} \quad \text{при} \quad x=2y, \quad z>x>y>0.$$

Ответ: Первые интегралы $U_1 = \frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, $U_2 = \frac{1}{z-y}+\frac{1}{y}$, общее решение $u=F(U_1,U_2)$, решение задачи Коши $u = -\frac{U_2}{U_1} = \frac{zx}{(x-y)(z-y)}$.

12. 3 Вычислить преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{\exp(ix)}{(i+x)^2}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Для справки: $F[g](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\exp(-ixy)\,dx$, где $g\in\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$.

Ответ: $F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \begin{array}{ll} -2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=-i} \frac{\exp\left(iz(1-y)\right)}{(i+z)^2}, & 1-y<0 \\ 0, & 1-y\geq 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{2\pi}(1-y)e^{1-y}, & y>1, \\ 0, & y\leq 1. \end{array} \right.$

13. (3) Вычислить

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3}{z+3} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \quad \text{где контур ориентирован против часовой стрелки.}$$

Ответ: $2\pi i \left(\frac{53}{6} - 27\sin\frac{1}{3}\right)$.

Обозначим $f(z) = \frac{z^3}{z+3}\sin\left(\frac{1}{z}\right)$, тогда $\oint\limits_{|z|=2} f(z)\,dz = -2\pi i \left(\operatorname*{res}\limits_{-3} f + \operatorname*{res}\limits_{\infty} f\right)$.

$\operatorname*{res}\limits_{-3} f = 27\sin\frac{1}{3}$, $\quad \operatorname*{res}\limits_{\infty} f = -\frac{53}{6}$, $\quad$ так как при $|z| > 3$ выполнено

$f(z) = z^2\left(1 - \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} + \ldots\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \ldots\right) = \frac{1}{z}\left(9 - \frac{1}{6}\right) + \ldots = \frac{53}{6z} + \ldots$

14. (3) Решить задачу Коши

$$\sqrt{y}u_{xy} + 2yu_{yy} + u_y = 0, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

$$u\Big|_{y=4} = 2, \quad u_y\Big|_{y=4} = -\frac{1}{4}, \quad 0 < x < 1.$$

в наибольшей области, где решение определено однозначно, и указать эту область.

Ответ: $u = 4 - \sqrt{y}$ в области $\{\, 0 < x < 1,\ -2 < x - \sqrt{y} < -1 \,\}$.

Характеристики $\xi = x$, $\eta = x - \sqrt{y}$.

Уравнение в характеристических переменных $\quad -\frac{1}{2}u_{\xi\eta} = 0$.

Общее решение $u = f(\xi) + g(\eta) = f(x) + g(x - \sqrt{y})$.

Из граничных условий $g(\eta) = \eta + C$ при $-2 < \eta < -1$ и $f(\xi) = 4 - \xi - C$ при $0 < \xi < 1$.

Получаем $u = 4 - \sqrt{y}$ при $0 < x < 1$ и $-2 < x - \sqrt{y} < -1$.

15. (3) Решить смешанную задачу на полупрямой

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u\Big|_{t=0} = \sin 3x, \quad u_t\Big|_{t=0} = -3\cos 3x, \quad x > 0,$$

$$u\Big|_{x=0} = -3t, \quad t > 0.$$

Ответ: $u = \begin{cases} \sin 3(x-t), & x \ge t \ge 0, \\ 3(x-t), & t \ge x \ge 0. \end{cases}$

$$u(t,x) = f(x-t) + g(x+t), \quad g(\eta) = C \quad \text{при} \quad \eta \ge 0, \quad f(\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin 3\xi, & \xi \ge 0, \\ 3\xi, & \xi \le 0. \end{array} \right\} - C.$$

16. (3) Решить краевую задачу в $\mathbb{R}^2$ ($x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$):

$$\Delta u = 36r^2\cos 2\varphi, \quad r < 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$u_r\Big|_{r=1} = 8\cos 2\varphi + 4\cos 4\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Ответ: $u = (3r^4 - 2r^2)\cos 2\varphi + r^4\cos 4\varphi + C, \quad \forall\, C \in \mathbb{R}$.

$$u(r,\varphi) = C + a(r)\cos 2\varphi + b(r)\cos 4\varphi, \quad a(r) = \alpha r^2 + 3r^4, \quad b(r) = \beta r^4, \quad 2\alpha + 12 = 8, \quad 4\beta = 4.$$

17. 3 Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$\rho_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Дискретная случайная величина Y имеет закон распределения $P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X - 2Y$, и вычислить математическое ожидание и дисперсию Z.

Ответ: $\rho_Z(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & t \in [-3, 1], \\ \\ 0, & t \notin [-3, 1], \end{cases} \qquad MZ = -1, \qquad MZ^2 = \frac{7}{3}, \quad DZ = \frac{4}{3}.$

$$P(Z < t) = \tfrac{1}{2}P(X < t) + \tfrac{1}{2}P(X < t + 2), \quad \Rightarrow \quad \rho_Z(t) = \tfrac{1}{2}\rho_X(t) + \tfrac{1}{2}\rho_X(t + 2).$$